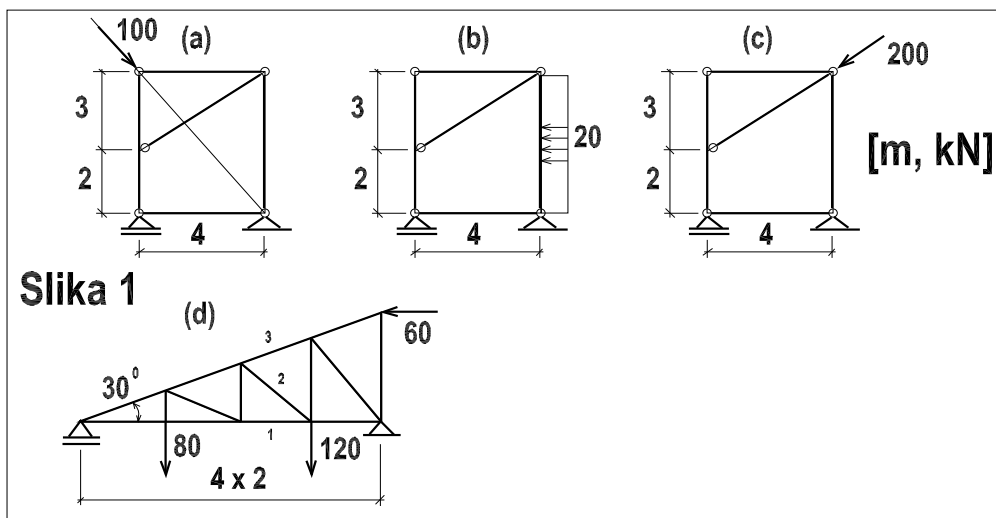
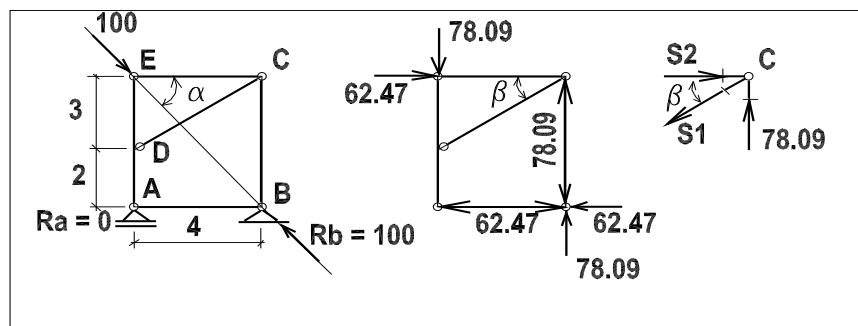


ZADATAK 1 (... 40% - Uslovni zadatak)

Za nosače na slici 1a-c nacrtati dijagrame presečnih sila, a za rešetku na sl. 1d odrediti sile u štapovima 1, 2, 3 primenom Riterovog postupka.

**ZADATAK 1a**

Imajući u vidu pravac aktivne sile, reakcija oslonca A je jednaka nuli, a reakcija oslonca B je u ravnoteži sa aktivnom silom: $|\vec{R}_B| = 100 \text{ kN}$.



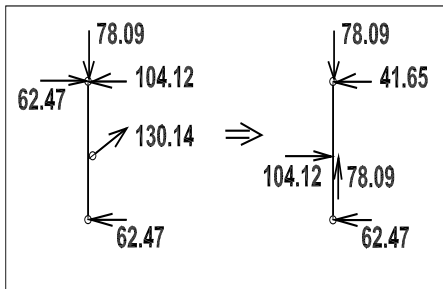
Prema geometriji nosača dobija se da je $\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{41}}$, kao i $\sin \alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}$, tako da su komponente aktivne sile i reakcije u osloncu B date sa 62.47 kN i 78.09 kN. Imajući u vidu

ravnotežu sila u čvoru B, sile u vertikalnom i horizontalnom prostom štapu su, redom, 78.09 kN i 62.47 kN.

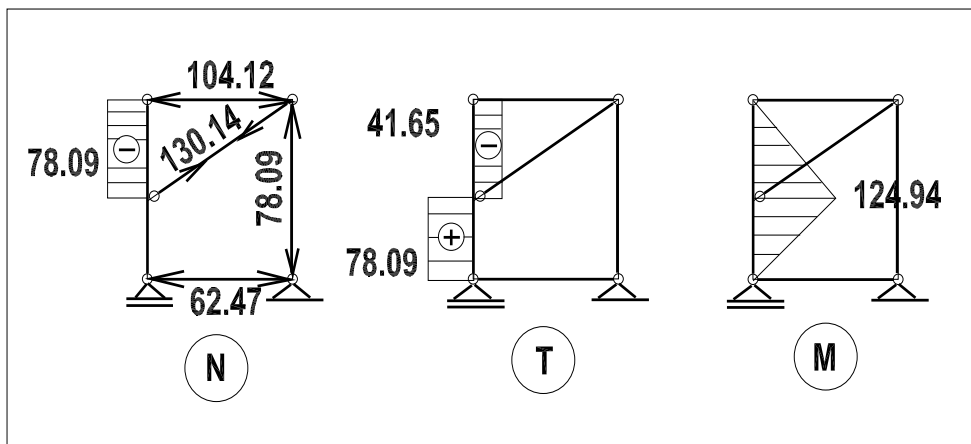
Iz geometrije se dobija da je $\tan \beta = \frac{3}{4}$, tako da se iz ravnoteže sila u čvoru C dobijaju sile S_1 i S_2 :

$$\begin{aligned} S_1 \cdot \frac{3}{5} - 78.09 &= 0 & \Rightarrow & S_1 = 130.14 \text{ kN} \\ S_1 \cdot \frac{4}{5} - S_2 &= 0 & (1) & S_2 = 104.12 \text{ kN} \quad (2) \end{aligned}$$

Ako se posmatra jedini puni deo nosača, deo A-E, dekompozicijom i sredjivanjem se dobijaju sile koje na taj deo deluju:



Ostali delovi nosača su prosti štapovi sa određenim normalnim silama. Dijagrami presečnih sila su prikazani na sledećim slikama, pri čemu se normalne sile u prostim štapovima prikazuju kao što je to uobičajeno kod rešetkastih nosača:

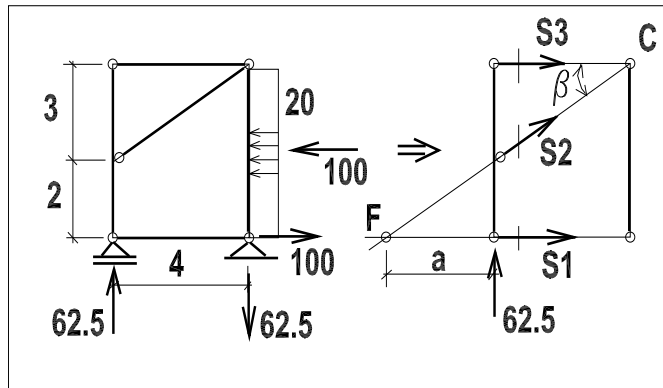


ZADATAK 1b

Horizontalna komponenta reakcije oslonca B je jednaka rezultanti aktivnih horizontalnih sila: $X_B = 100 \text{ kN}$ i sa njom čini spreg sila momenta $100 \times 2.5 = 250 \text{ kNm}$. Prema tome,

reakcija oslonca A i vertikalna reakcija oslonca B takodje čine spreg suprotnog smera. Kako je krak vertikalnih reakcija oslonaca A i B jednak 4.0 m, to su vertikalne reakcije jednake: $R_A = Y_B = \frac{250}{4} = 62.5 \text{ kN}$. To je prikazano na slici.

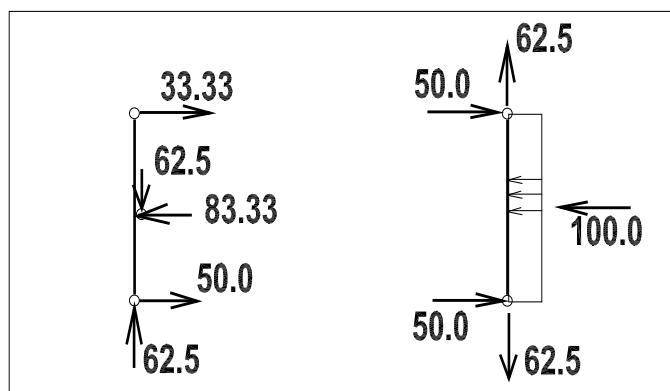
Sile u prostim štapovima se određuju dekompozicijom: uklanjanjem štapova i primenom Riterovog postupka. Pri tome je tačka F određena iz geometrije nosača: $\tan \beta = \frac{3}{4} = \frac{2}{a}$, odn. $a = \frac{8}{3} = 2.667 \text{ m}$.



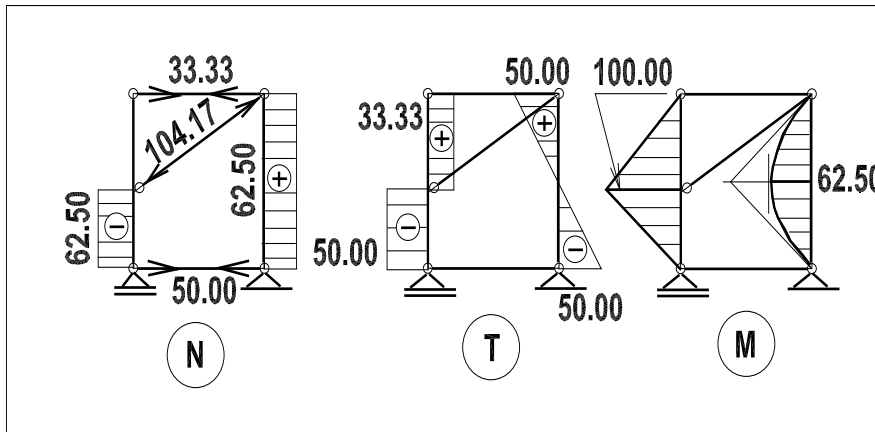
Primenom Riterovog postupka se dobija:

$$\begin{aligned} \sum M_C = 0 : \quad S_1 \cdot 5 - 62.5 \cdot 4 &= 0 & \Rightarrow & \quad S_1 = 50.0 \text{ kN} \\ \sum M_F = 0 : \quad S_3 \cdot 5 - 62.5 \cdot 2.667 &= 0 & \Rightarrow & \quad S_3 = 33.33 \text{ kN} \\ \sum Y = 0 : \quad S_2 \cdot \sin \beta + 62.5 &= 0 & \Rightarrow & \quad S_2 = -104.17 \text{ kN} \end{aligned} \quad (3)$$

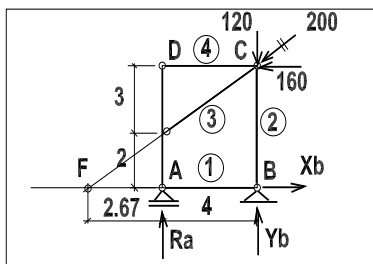
(pri čemu je $\sin \beta = 0.6$). Sa dobijenim silama u prostim štapovima, lako se dobijaju uticaji na izdvojene vertikalne (pune) delove nosača ($104.17 \cdot \sin \beta = 62.5$, $104.17 \cdot \cos \beta = 83.33$):



Sa ovim se dobijaju konačni dijagrami presečnih sila u posmatranom nosaču ($f = \frac{20 \cdot 5^2}{8} = 62.5$):



ZADATAK 1c



Reakcije veza se dobijaju iz jednačina ravnoteže:

$$\sum X = 0 : \quad X_B - 160 = 0$$

$$\sum Y = 0 : \quad R_A + Y_B - 120 = 0 \quad (4)$$

$$\sum M_A = 0 : \quad Y_B \times 4 - 120 \times 4 + 160 \times 5 = 0$$

Dobijaju se rešenja:

$$X_B = 160, \quad Y_B = -80, \quad R_A = 200 \quad [\text{kN}] \quad (5)$$

Posmatrani nosač se sastoji iz četiri prosta štapa i samo je deo A-D puni nosač. Uslovi ravnoteže sila u čvoru B su trivijalan slučaj ($S_1 = X_B$ $S_2 = Y_B$, obe sile zatezanje), a iz uslova ravnoteže sila u čvoru C se dobijaju preostale dve sile S_3 i S_4 :

Uslovi ravnoteže sila u čvoru C:

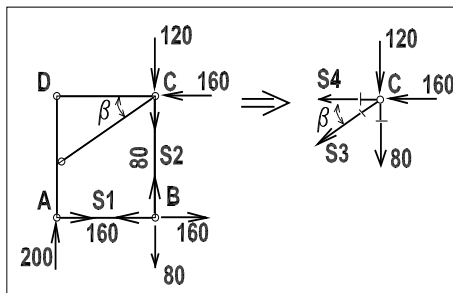
$$\sum X = 0 : \quad S_3 \times \frac{4}{5} + S_4 + 160 = 0$$

$$\sum Y = 0 : \quad S_3 \times \frac{3}{5} + 200 = 0 \quad (6)$$

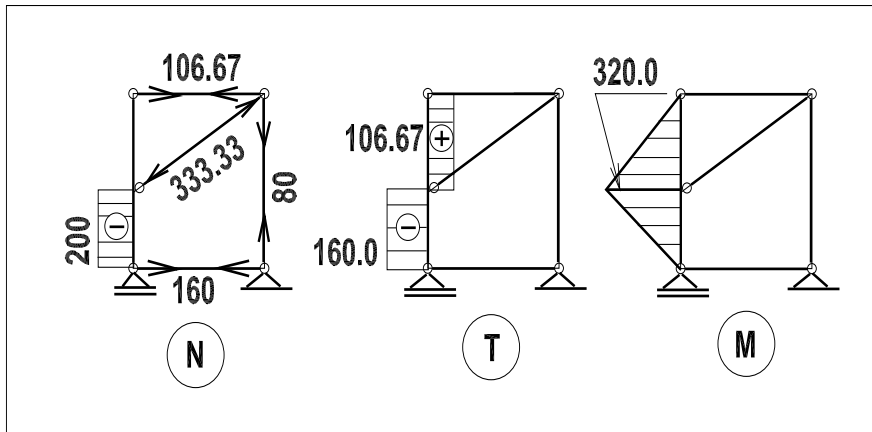
Dobija se rešenje:

$$S_3 = -333.33 \quad S_4 = 106.67 \quad [\text{kN}] \quad (7)$$

(štap 3 - pritisak, štap 4 - zatezanje)

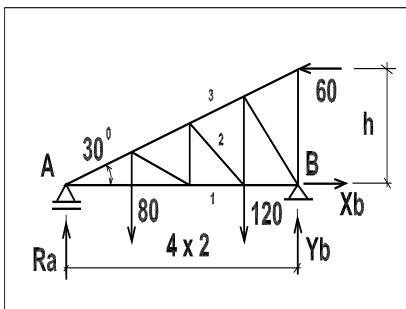


Sa nadjenim silama u prostim štapovima 1-4 i izdvajanjem punog dela A-D, dobijaju se konačni dijagrami presečnih sila:

**ZADATAK 1d**

Visina rešetke je data sa:

$$h = 8 \times \tan 30^\circ = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 4.619 \text{ [m]} \quad (8)$$



Reakcije oslonaca se odredjuju iz uslova ravnoteže:

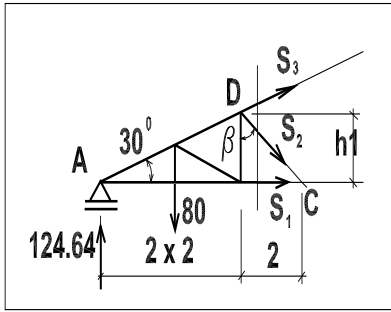
$$\begin{aligned} \sum X = 0 : \quad X_B - 60 &= 0 \\ \sum Y = 0 : \quad R_A + Y_B - 200 &= 0 \\ \sum M_A = 0 : \quad Y_B \times 8 + 60 \times 8 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - 120 \times 6 - 80 \times 2 &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Dobijaju se rešenja:

$$X_B = 60, \quad Y_B = 75.36, \quad R_A = 124.64 \text{ [kN]} \quad (10)$$

Presekom kroz štapova 1-3 i posmatranjem uslova ravnoteže levog dela rešetka (ima manje sila), dobijaju se sile u štapovima 1-3. Pri tome je iz geometrije poznato:

$$h_1 = 4 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 2.31 \text{ [m]} \quad \tan \beta = \frac{2}{\frac{4}{\sqrt{3}}} = 0.866 \quad \Rightarrow \quad \beta = 40.893^\circ$$



Reakcije oslonaca se odredjuju iz uslova ravnoteže:

$$\begin{aligned}\sum M_A = 0 : \quad & S_2 \cdot \cos \beta \times 4 + S_2 \cdot \sin \beta \times \frac{4}{\sqrt{3}} 80 \times 2 = 0 \\ \sum M_C = 0 : \quad & S_3 \cdot \cos 30^\circ \times \frac{4}{\sqrt{3}} + S_3 \cdot \sin 30^\circ \times 2 + \\ & + 124.64 \times 6 - 80 \times 4 = 0 \\ \sum M_D = 0 : \quad & S_1 \times \frac{4}{\sqrt{3}} + 80 \times 2 - 124.64 \times 4 = 0\end{aligned}\quad (11)$$

Dobijaju se rešenja:

$$S_2 = -35.28, \quad S_3 = -142.61, \quad S_1 = 146.60 \quad [\text{kN}] \quad (12)$$

Štapovi 2 i 3 su pritisnuti, a štap 1 je zategnut.

ZADATAK 2 (... 30 %)

(a) (... 5 %) Prikazati redukciju proizvoljnog sistema sila i osnovne slučajevne transformacije polaznog sistema sila.

(b) (... 25 %) Za dati sistem sila \vec{F}_i , sa napadnim tačkama P_i , $i = 1, \dots, 4$, odrediti petu silu \vec{F}_5 i njenu napadnu tačku (koordinate y_5 i z_5) tako da svih pet sila čine ravnotežni sistem sila.

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 &= 20 \cdot \{1, 0, 0\} & P_1(2, 3, 4) \\ \vec{F}_2 &= 40 \cdot \{0, -1, 0\} & P_2(-2, 2, -3) \\ \vec{F}_3 &= 30 \cdot \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\} & P_3(1, -1, 0) \\ \vec{F}_4 &= 25 \cdot \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\} & P_4(-3, -2, 3) \\ \vec{F}_5 &= \{X_5, Y_5, Z_5\} & P_5(x_5 = 1, y_5, z_5)\end{aligned}$$

ZADATAK 2b

Potrebni i dovoljni uslovi da neki sistem sila bude u ravnoteži su dati sa:

$$\vec{F}_R = 0 \quad \wedge \quad \vec{M}_R = 0 \quad (13)$$

Glavni vektor sila proizvoljnog sistema je dat sa:

$$\vec{F}_R = \sum_{k=1}^{k=N} \vec{F}_k = \{X_R, Y_R, Z_R\}$$

Glavni vektor sila posmatranog sistema je jednak nuli ako je:

$$X_R = 20 + 30 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 25 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + X_5 = 0$$

$$\begin{aligned}
Y_R &= -40 + 25 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + Y_5 = 0 \\
Z_R &= -30 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 25 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + Z_5 = 0
\end{aligned} \tag{14}$$

Iz jednačina (14) se dobija:

$$X_5 = -55.647 \quad Y_5 = 25.566 \quad Z_5 = 6.779 \quad [\text{kN}] \tag{15}$$

odnosno, sila \vec{F}_5 je data sa:

$$\vec{F}_5 = 61.613 \cdot \{-0.903, 0.415, 0.110\} \tag{16}$$

Glavni vektor momenata prizvoljnog sistema sila za redukcionu tačku A je dat sa:

$$\vec{M}_R^A = \sum_{k=1}^{k=N} \vec{M}_k^A = \sum_{k=1}^{k=N} \vec{\rho}_k \times \vec{F}_k = \{M_{Rx}^A, M_{Ry}^A, M_{Rz}^A\} \tag{17}$$

gde su $\vec{\rho}_k$ vektori položaja koji povezuju redukcionu tačku sa napadnom tačkom sile \vec{F}_k .
Za posmatrani sistem sila se dobija:

$$\begin{aligned}
\vec{M}_1^A &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 20 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \{ 0, \quad 80, \quad -60 \} \\
\vec{M}_2^A &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 2 & -3 \\ 0 & -40 & 0 \end{vmatrix} = \{ -120, \quad 0, \quad 80, \} \\
\vec{M}_3^A &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 30 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -30 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = \left\{ 30 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 30 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 30 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right\} = \\
&= \{ 21.213, \quad 21.213, \quad 21.213 \} \\
\vec{M}_4^A &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -2 & 3 \\ 25 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} & 25 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} & 25 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \end{vmatrix} = \left\{ -5 \cdot 25 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad 6 \cdot 25 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad -25 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \right\} = \\
&= \{ 72.169, \quad 86.602, \quad -14.434 \} \\
\vec{M}_5^A &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_5 = 1 & y_5 & z_5 \\ -55.647 & 25.566 & 6.779 \end{vmatrix} = \\
&= \left\{ (6.779y_5 - 25.566z_5), \quad (55.647z_5 - 6.779x_5), \quad (25.566x_5 + 55.647y_5) \right\}
\end{aligned} \tag{18}$$

Sabiranjem se dobija glavni vektor momenata datog sistema sila. Uslov da je glavni vektor momenata jednak nuli se svodi na jednačine:

$$\begin{aligned}
6.779y_5 - 25.566z_5 - 170.996 &= 0 \\
55.647z_5 - 6.779x_5 + 187.816 &= 0 \\
25.566x_5 + 55.647y_5 + 26.779 &= 0
\end{aligned} \tag{19}$$

Imajući u vidu da je zadato da je $x_5 = 1$, iz jednačina (19) se dobija:

$$y_5 = -0.941 \quad z_5 = -6.938 \quad [\text{m}] \quad (20)$$

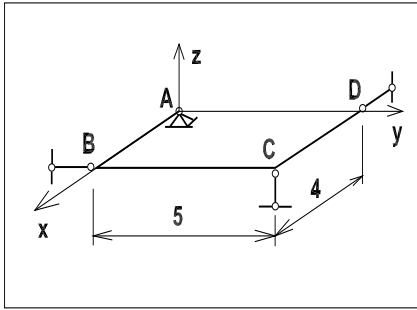
Prema tome, sila \vec{F}_5 i njena napadna tačka P_5 su određeni sa:

$$\vec{F}_5 = 61.613 \cdot \{-0.903, 0.415, 0.110\} \quad P_5 (1.00, -0.941, -6.938) \quad (21)$$

ZADATAK 3 (... 30%)

(a) (10 %) Objasniti pojam kritične konfiguracije, odn. prikazati analizu rasporeda veza.

(b) (20 %) Za nosač na slici utvrditi da li su veze dobro rasporedjene.



ZADATAK 3b

Virtuelno pomeranje tačke P krutog tela je dato sa:

$$\delta \vec{r} = \delta \vec{r}_A + \delta \vec{\theta} \times \vec{\rho}_P \quad (22)$$

gde je A referentna tačka, a $\vec{\rho}_P = \vec{AP}$

U posmatranom primeru je za referentnu tačku izabrana tačka A, gde je A sferni oslonac, tako da je

$$\delta \vec{r}_A = 0$$

Jednačine veza u tačkama B, C i D, izražene preko virtuelnih pomeranja, glase:

$$\delta \vec{r}_B \cdot \vec{j} = 0 \quad \delta \vec{r}_C \cdot \vec{k} = 0 \quad \delta \vec{r}_D \cdot \vec{i} = 0 \quad (23)$$

Kako je $\delta \vec{r}_A = 0$, to su virtuelna pomeranja tačaka B, C i D data sa:

$$\delta \vec{r}_B = \delta \vec{\theta} \times \vec{\rho}_B \quad \delta \vec{r}_C = \delta \vec{\theta} \times \vec{\rho}_C \quad \delta \vec{r}_D = \delta \vec{\theta} \times \vec{\rho}_D \quad (24)$$

odnosno, u razvijenom obliku:

$$\begin{aligned} \delta \vec{r}_B &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \delta \theta_x & \delta \theta_y & \delta \theta_z \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \{ 0, 4\delta \theta_z, -4\delta \theta_y \} \\ \delta \vec{r}_C &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \delta \theta_x & \delta \theta_y & \delta \theta_z \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \{ -5\delta \theta_z, 4\delta \theta_z, 5\delta \theta_x - 4\delta \theta_y \} \\ \delta \vec{r}_D &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \delta \theta_x & \delta \theta_y & \delta \theta_z \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \{ -5\delta \theta_z, 0, 5\delta \theta_x \} \end{aligned} \quad (25)$$

Imajući u vidu (25), jednačine veza (23) glase:

$$4\delta\theta_z = 0 \quad 5\delta\theta_x - 4\delta\theta_y = 0 \quad -5\delta\theta_z = 0 \quad (26)$$

odnosno u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta\theta_x \\ \delta\theta_y \\ \delta\theta_z \end{Bmatrix} = 0 \quad (27)$$

ili skraćeno:

$$A \cdot \delta = 0 \quad (28)$$

Kako je determinanta matrice A očigledno jednaka nuli,

$$\det A = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta \neq 0 \quad (29)$$

Prema tome, u posmatranom primeru su veze loše rasporedjene.